Gheorghe ANDREI Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ $[x]$
PARTEA FRACŢIONARĂ $\{x\}$
$x = [x] + \{x\}$

VOLUMUL II

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Editura Paralela 45

CUPRINS

capitolul 13 Elemente de aritmetică

§ 1.

1*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

a) $\left[\sqrt{n^2+n}\right]$;

b) Prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2+n}$;

c) Să se determine ultima cifră a numărului $\left[10\cdot\sqrt{n^2+n}\right]$.

2. Arătați că pentru $n \geq 5$ numărul a_n, egal cu partea fracționară a numărului $\sqrt{n^2+2n}$, are prima zecimală 9.
Există n pentru care a_n are primele 2011 zecimale egale cu 9?

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine prima zecimală a șirului $a_n=\sqrt{n^2+n}$;

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care prima zecimală a numărului $b_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ este 2;

c) Determinați prima zecimală de ordinul 1 a șirului $c_n=\sqrt{4n^2+n}$.

4. Determinați toate numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care a doua zecimală a numărului $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$ nu este 9.

5. Determinați cel mai mic număr natural pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2+4n+1}$ sunt egale cu 9.

6**. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul:

$$A=\left[\frac{n^3+8n^2+1}{3n}\right] \text{ este prim.}$$

7**. Să se determine cel mai mic număr natural pentru care

$$0{,}7<\left\{\sqrt[3]{n}\right\}<0,(7).$$

8**. Descrieți forma numerelor naturale n pentru care $1+\left[\sqrt{2n}\right]$ divide pe $2n$.

9**. Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n pentru care partea întreagă a numărului $\sqrt{n+1+\sqrt{n}}$ este diferită de partea întreagă a numărului $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$.

10**. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left[n\sqrt{2}\right]=\left[n\sqrt{3}\right]$.

11**. Să se arate că nu există $m,n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left\{2^m\sqrt{5}\right\}=\left\{3^n\sqrt{5}\right\}$.

12. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$, numărul $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ este compus.

13*. Determinați numerele naturale n care satisfac simultan proprietățile:

a) $\left[\frac{n}{9}\right]$ este număr natural de trei cifre egale;

b) $\left[\frac{n+36}{4}\right]$ este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind $\{2,0,0,9\}$.

14. Să se determine $a > 0$ știind că $a^2 + 2[a]$ să fie pătrat perfect.

15. Să se arate că $a_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + n^2 + 3n + 3$ este pătrat perfect, pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

16**. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

a) $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ este număr prim;

b) Să se detemine cel mai mare $n \in \mathbb{N}$, pentru care $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ este număr prim.

17**. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ și $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2, atunci n este o putere a lui 2.

18***. Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ cu $a < \sqrt{2n}.$ Să se arate că numărul $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ este pătrat perfect, dacă și numai dacă n se divide cu a.

19**. Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left\{\sqrt{n + \sqrt{n}}\right\} = \{\sqrt{a}\}$. Arătați că $4a + 1$ este pătrat perfect.

20. Fie p un număr prim, $p \geq 3$ și d un număr liber de pătrate.
Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea: $\left\{n\sqrt{d} + \frac{n}{p}\right\} = \{n\sqrt{d}\}$?

21**. Să se arate că: $\left[a\left[\frac{n+a^2}{a}\right] + a\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, unde $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22**. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$, numărul de aur, adică soluția pozitivă a ecuației

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

(Ecuația caracteristică a șirului lui Fibonnaci)
Să se arate că $[a^2 n] \equiv \big[a[an]\big] + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

23**. Fie $a, b, a > b$ rădăcinile ecuației: $x^2 - x - 1 = 0$ și $\sigma_n = a^n + b^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $[a\sigma_n] = \begin{cases} \sigma_{n+1}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ \sigma_{n+1} - 1, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$.

24**. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a > b$ rădăcinile ecuației $2x^2 - 2x - 1 = 0$.
Să se arate că: $[b^n\sqrt{3}] = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{cases}$.

25**. Fie $a \in \mathbb{N}^*$ și $E(a) = \{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \{\sqrt{a}\}^3$. Să se demonstreze că $E(a)$ este rațional dacă și numai dacă a este pătrat perfect.

26. Să se arate că numărul natural $n \geq 1$ este pătrat perfect dacă și numai dacă $[\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}] = 1$.

27. Să se arate că $[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}]$ dacă și numai dacă $n + 1$ nu este pătrat perfect.

28. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ numărul de reprezentări distincte ale lui n ca sumă de două numere naturale ($n = a + b$ și $n = b + a$ constituie aceeași reprezentare). Să se arate că:

a) $s(m+n) = s(m) + s(n) - \frac{1}{2}(1 + (-1)^{mn}]$;

b) $\sum_{k=0}^{n} s(k) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

29. Fie a și b două numere reale pozitive, care nu sunt pătrate perfecte, $a < b$. Atunci numărul pătratelor perfecte situate între a și b este:

$$[\sqrt{b}] - [\sqrt{a}].$$

30*. Fie a și b două numere întregi, care nu sunt cuburi perfecte.
Atunci numărul cuburilor perfecte situate între a și b este: $[\sqrt[3]{b}] - [\sqrt[3]{a}]$.

31. Să se determine numărul natural n, astfel încât expresia: $n + 4^{[\sqrt{n}]} + 3$ să fie pătrat perfect.

32**. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, între n și $2n$ există un pătrat perfect.

33***. Determinați numerele naturale nenule, care nu sunt pătrate perfecte și pentru care $[\sqrt{n}]^3$ divide n^2.

34. Fie p un număr natural prim și k un număr natural dat. În câte moduri se poate scrie p^k sub formă de diferență a două pătrate perfecte?

35. Să se determine numărul $\overline{abcd}$ știind că:

$$[\sqrt{\overline{ca}}] + [\sqrt{\overline{cb}}] + [\sqrt{\overline{cc}}] + [\sqrt{\overline{cd}}] = \sqrt{\overline{abcd}}.$$

36. Determinați numerele $\overline{abc}$ știind că: $[\sqrt{\overline{bca}}] = 2[\sqrt{\overline{abc}}]$.

37. Să se determine numerele $\overline{abc}$ știind că:

a) $\left[\sqrt{\overline{abc}}\right] = 11 = a + b + c$;

b) $\left[\sqrt{\overline{abc}}\right] = 21$ și $a + b + c = 15$.

38. Determinați $\overline{ab}$ dacă $\left[\overline{a,b}^3\right] = \overline{a,b}$.

39. Determinați cifrele a, b distincte, nenule știind că:

$$\left[\sqrt{\overline{abb}}\right] + \left[\sqrt{\overline{bba}}\right] + \left[\sqrt{\overline{bab}}\right] = a + \overline{bb}.$$

∮ 2.

40. Numărul numerelor $p \in \{1,2,3, \dots, n\}$ care se divid la numărul $1 \le k \le n$ este egal cu $\left[\frac{n}{k}\right]$.

41. Câte numere naturale există printre numerele $\frac{1m}{n}, \frac{2m}{n}, \frac{3m}{n}, \dots, \frac{pm}{n}$, unde $m, n, p \in \mathbb{N}^*$?

42. În câte zerouri se termină 400! ?

43. Să se determine exponentul lui 108 în 253! .

44. Să se determine valoarea numitorului fracției după simplificare:

$$N = \frac{100!}{6^{100}}.$$

45. Să se determine exponentul α al numărului prim p în $(p^n)!$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

46**. Să se determine în câte zerouri se termină $p!$, unde

$$p = \frac{5^n - 1}{4}, (n \in \mathbb{N}^*).$$

47**. Să se arate că oricare ar fi numărul natural $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, numărul $n!$ nu se divide la 2^n.

48**. Să se determine $\left[\frac{10^{2017}}{S_{2014}}\right]$, unde: $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ ori}}$.

49*. Să se determine ultima cifră a numărului $\left[\frac{10^{93}}{10^{31} + 3}\right] = [A]$.

50**. Factorialul căror numere se termină exact în 1000 de zerouri?

51**. a) Să se arate că $\{\varphi\} = \frac{1}{\varphi}, \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$;

b) Să se calculeze $\left\{\frac{99^{99}}{1 - 99^9}\right\}, \left[\frac{99^{99}}{1 - 99^9}\right]$.

52**. Să se determine ultima cifră a numărului $A = \left[\frac{10^{20000}}{10^{100} + 3}\right]$.

53**. Să se determine exponentul lui 2 în descompunerea în factori a numărului: $A_n = (n + 1)(n + 2) \dots (2n)$.

54**. Fie $a = \sqrt{111 \ldots 11 \ldots}$ (de 1998 ori). Să se determine:

a) $[a]$;

b) a mia zecimală a numărului.

55**. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât $\left[\sqrt[n]{111}\right]$ să dividă numărul 111.

56*. Fie $a = \left\{\sqrt{123456789}\right\}$. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$.

57*. Să se determine $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât $\left[\sqrt[n]{53}\right]$ să dividă pe 35.

58. Arătați că 1997! se divide la 19^{97} și nu se divide la 19^{111}.

59*. Să se arate că $\left\{\sqrt{333 \ldots 3}\right\} \neq \left\{\sqrt{22 \ldots 2}\right\}$ unde numerele de sub semnul radical au același număr de cifre.

60*. Determinați numerele naturale n pentru care:

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\} = 0{,}08(3).$$

61. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\left[1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}\right] = n$.

62. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ și $E_{n,k} = n!\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!}\right)$.

Să se arate că:

a) $E_{n,k} \notin \mathbb{N}^*$;

b) Să se calculeze $\left[E_{n,k}\right]$.

63***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $\frac{[n!\, e] - 1}{n} \in \mathbb{N}$;

b) $\frac{[n \cdot n!\, e] - n}{n^2} \in \mathbb{N}$.

64*. Care este cel mai mic număr natural n, pentru care numerele reale $\sqrt{n}$ și $\sqrt{n+9}$ au aceeași parte întreagă?

65**. Să se determine numerele naturale n cu proprietatea că $\left[\sqrt{n}\right]$ divide pe n.

66***. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ce valoare poate avea $a_n = \left[\sqrt{\sqrt{n}\left[n\sqrt{n}\right]}\right]$?

67**. Fie $p > 2$ număr prim. Determinați numerele naturale n, pentru care $\left\{\sqrt{n}\right\} = \left\{\sqrt{n+p}\right\}$.

68**. Să se compare mediile aritmetice ale mulțimilor de numere:

$$\left\{\left[\frac{2012}{1}\right], \left[\frac{2012}{2}\right], \ldots, \left[\frac{2012}{2012}\right]\right\} \text{ și } \left\{\left[\frac{2013}{1}\right], \left[\frac{2013}{2}\right], \ldots \left[\frac{2013}{2013}\right]\right\}.$$

69**. Determinați numerele naturale n pentru care: $\left\{\sqrt{m}\right\} = \left\{\sqrt{m+2011}\right\}$.